はじめに

教科書の練習問題や章末問題、参考書の問題は解けるが大学入試の問題となると解けないという話は良く聞きます。その理由のひとつに入試問題が単元別に作られていないということがあると思います。入試問題は「〇〇の面積を求めよ.」「〇〇の最大値を求めよ.」のようになっていて、相手（出題者）の要求を満たすためには自分で道具を選択して使わなければなりません。この道具は高校数学の様々な分野に散らばっているということが入試問題の取っ付きにくさの原因ではないでしょうか。さらに単元別にまとめられている教科書や参考書にはあまり書かれていない‘知恵’が必要であることも、教科書レベルと入試レベルとの差を生じさせる要因になっていると思います。(1)

このカリキュラムでは高校数学の分野にとらわれずに出題形式別の授業を展開していこうと思います。(2) 第一弾は不等式の証明問題を扱っていきます。(3)

（注）

（１）単元別学習が必要ない、教科書は必要ないなどと言いたいのではありません。これらは大切です！重要です！必要です！

（２）といっても数ⅠＡⅡＢと数Ⅲは分けます。数Ⅲが必要でない方は数ⅠＡⅡＢの問題のみを解いて動画を見てください。

（３）第二弾以降があるかどうかはわかりません。

講義内容について

どんなことに対してもそうですけど道具の選択を間違えると目標達成できなかったり、できたとしても無駄に時間と労力を費やしてしまったりします。不等式の証明は特にそうです。無い袖は振れませんからね、まずは不等式の証明に必要な道具を紹介していきます。つぎに、その道具を問題でどう使っていくか講義していきます。

それから、不等式の証明から派生して大小比較の問題と最大最小問題について少しだけ話します。

準備はできたかな？Global Mathematics の始まりです。カリキュラムが終われば見通しが良くなって少し高い位置から遠くを見渡せるようになっていることでしょう。

【１】（愛知大学）

$a \geq b$， $x \geq y$のとき、$\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{ax+by}{2}$を示せ.

【２】（龍谷大学）

次の不等式を証明せよ．また、等号が成立するのはどんな場合か述べよ.

（１） xとyが実数のとき、$x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5 \geq 0$

（２）略

【３】（富山県立大）

$a \neq b$のとき、不等式$ab + bc + ca < a^2 + b^2 + c^2$が成り立つことを示せ.

【４】（岩手医大）

正の実数 x, y, z に対して、$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$かつ$\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$が成り立つことを示せ.

【５】Ⅲ（筑波大）

$a \geq b > 0$, $x \geq 0$ とし、nは自然数とする．次の不等式を示せ.

（１） $0 \leq e^x - (1+x) \leq \dfrac{x^2 e^x}{2}$

（２） $a^n - b^n \leq n(a-b)a^{n-1}$

（３） $e^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leq \dfrac{x^2 e^x}{2n}$

【６】Ⅲ（岡山県大）

nが自然数のとき、次の不等式を証明せよ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

【７】Ⅲ（静岡大）

（１）定積分$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$の値を求めよ.

（２）不等式$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx < 1$が成り立つことを示せ.

【８】（名古屋大）

nを自然数とするとき，３つの数

$$a = \sqrt[5]{1+\frac{1}{n}} - 1,\quad b = 1 - \sqrt[5]{1-\frac{1}{n}},\quad c = \frac{1}{5n}$$

の大きさを比較せよ.

【９】Ⅲ（熊本大）

次の問いに答えよ.

（１）$x < 0$のとき、e^{-x}とx^2+1の大小関係を調べよ.

（２）略

【１０】（神奈川大）

$a > 0,\ \ b > 0$　のとき、$(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)$の最小値を求めよ.

【１１】（関西大）

$a,\ \ b,\ \ c$　を$a^2+b^2+c^2=1$を満たす実数とすると、$a+b+c$の最大値は$\boxed{}$である.

問題番号の左上にⅢと書かれているものは数Ⅲの問題です。

ただし、【５】の（２）は数Ⅲを使わなくても解くことができますし、解説でも数Ⅲを使う解答と数Ⅲを使わない解答をお見せします。